

75. Országos Matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2025. február 15.
IX. osztály

1. feladat. Bizonyítsd be, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

bármely $n > 1$ természetes szám esetén!

2. feladat. Adott az a, b és c szigorúan pozitív valós szám.

a) Igazold, hogy

$$\begin{aligned}a^2b^2 + b^2c^2 &\geq 2ab^2c \\a^2b^2 + a^2c^2 &\geq 2a^2bc \\a^2c^2 + b^2c^2 &\geq 2abc^2.\end{aligned}$$

b) Ha $a + b + c = 1$ és $ab + bc + ca = \sqrt{3abc}$, akkor határozd meg a, b és c számot!

3. feladat.

a) Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024| = 2025(x - 2025).$$

b) Ha az x megoldása az alábbi egyenletnek

$$|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - n| = (n + 1)(x - n - 1),$$

akkor bizonyítsd be, hogy $x \geq \frac{5n+1}{2}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

4. feladat. Adott az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{CD} úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, ahol $k > 1, k \in \mathbb{R}$ és A, B, C, D nem kollineáris. Az M, N és P pont rendre az AD, BC és AB szakasz felezőpontja.

a) Igazold, hogy $\overrightarrow{MN} = \frac{k-1}{2} \cdot \overrightarrow{CD}$;

b) Határozd meg az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektor függvényében azokat az \overrightarrow{AQ} vektorokat, amelyekre az M, N, P és Q egy paralelogramma csúcsai (nem feltétlenül ilyen sorrendben)!

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk