



75. Országos Matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2025. február 15.

X. osztály

1. feladat. Igazold, hogy az $f: [4, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 16}}$ függvény bijektív, és határozd meg az f inverz függvényét!

2. feladat. Igazold, hogy bármely olyan $z \in \mathbb{C}$ esetén, amelyre $|z| = 1$, és bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$n \cdot |1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \dots + |1 + z^{2n+1}| \geq 2n.$$

3. feladat. Igazold, hogy $(\log_{45} S + 1) \cdot (\log_{44} S - 1) = -1$, ahol:

$$S = \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$$

4. feladat. Igazold, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$4 < \log_3 5 + \log_5 11 + \log_{11} 27 < \frac{9}{2}$$

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk