

75. Országos Matematikaolimpia
Körzeti szakasz, 2025. február 15.
XI. osztály

1. feladat.

Adott az $(x_n)_{n \geq 1}$ számsorozat, amelyre $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ és $x_{n+3} = x_n$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ határértéket!

2. feladat.

Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix.

Legyen az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $C^n = a_n A + b_n B$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2a_n + 2b_n} = 10$.

3. feladat.

Legyen az $(x_n)_{n \geq 0}$ valós számsorozat az $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{2025}{x_n^2} \right)$ rekurzív képlettel értelmezve és $x_0 \geq 0$.

Bizonyítsd be, hogy $(x_n)_{n \geq 0}$ konvergens és számítsd ki a határértékét!

4. feladat.

Legyen M az $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmaza, ahol $a_n = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}$ alakú

(a számlálóban n db gyökjellel), és $b_n = \sqrt{1 - a_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Határozd meg az A_1^{2025} mátrixot!
- Igazold, hogy $a_n = 2a_{n+1}^2 - 1$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!
- Igazold, hogy létezik $k \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $A_{2025}^k = I_2$.

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk