

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025
Clasa a XI-a

Problema 1.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ și $x_{n+3} = x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Problema 2.

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Fie șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $C^n = a_n A + b_n B, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2a_n + 2b_n} = 10$.

Problema 3.

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{2025}{x_n^2} \right)$, $x_0 \geq 0$.

Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Problema 4.

Fie M mulțimea matricelor de forma $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, cu $a_n = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2}$

(în numărător sunt n radicali), iar $b_n = \sqrt{1 - a_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Determinați A_1^{2025} .
- Verificați că $a_n = 2a_{n+1}^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Arătați că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A_{2025}^k = I_2$.

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.