



75. Országos Matematikaolimpia

Körzeti szakasz, 2025. február 15.

XII. osztály

1. feladat. Adott az $M = (-\infty, 1)$ halmaz, és minden $(x, y) \in M \times M$ esetén

$$x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}.$$

a) Igazold, hogy az M halmaz zárt a „ $*$ ” műveletre nézve!

b) Igazold, hogy a „ $*$ ” művelet kommutatív, asszociatív, de nincs semleges eleme!

2. feladat. Számítsd ki a következő határozatlan integrálokat:

a)

$$\int \frac{2x^2 + 3e^x - 1}{x^2 + e^x - x} dx, \quad x \in \mathbb{R};$$

b)

$$\int \frac{\sin x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. feladat. Adott a (G, \cdot) véges csoport és $g \in G$ úgy, hogy $\text{ord}(g) = 6$. Igazold, hogy létezik egyetlen olyan $a, b \in G$, amelyre $\text{ord}(a) = 2$, $\text{ord}(b) = 3$ és $a \cdot b = b \cdot a = g$.

($\text{ord}(x)$ -szel az x elem rendjét jelöltük.)

4. feladat. Határozd meg azt az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek egy primitívje az $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, és amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$(1) \quad 2x^3 F(x) + x^2 f(x) = e^{x^2} \cdot (4x^2 - 1), \quad \forall x \in (0, +\infty);$$

$$(2) \quad f(1) = e - \frac{2}{e}.$$

Minden feladatot részletesen oldj meg, indokold meg válaszaidat!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.