

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a V-a

1. Arătați că numerele de forma $5^{n+4} \cdot 2^n - 625$ se împart exact la 5625, pentru orice număr natural n .

Gazeta Matematică

2. (a) Scrieți numărul 2025 ca suma a două pătrate perfecte nenule.
(b) Scrieți numărul $a = 2025^{2025}$ ca sumă a două pătrate perfecte nenule.

George Chetreanu

3. Împărțind un număr de 4 cifre la răsturnatul său, obținem câtul 6 și restul 139. Aflați numărul, știind că diferența dintre cifra miilor și cea a unităților este 6, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a zecilor este 7.

4. La un concurs, la care au participat 3 elevi, s-au formulat 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 10 puncte, iar pentru un răspuns greșit se scad 5 puncte. Concurenții au obținut în total 240 de puncte. Știind că al doilea a răspuns la un număr de întrebări mai mare cu 3 față de primul concurent, aflați la câte întrebări a răspuns corect fiecare concurent.

Adriana Cațaron

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a VI-a

1. Fie numerele naturale nenule a, b, c, d , astfel încât a, b și c sunt direct proporționale cu 5, 6 și 8, iar c și d sunt invers proporționale cu 0,25 și 0,1(6).

- (a) Ce procent reprezintă b din d ?
(b) Determinați numerele a, b, c și d știind că $a + 2b + 2c + 4d = 2025$.

Mihaela Sinteia

2. Fie mulțimile $A = \{x | x = 2^n; n \in \mathbb{N}; 10 \leq n < 25\}$ și $B = \{y | y = 2^m; m \in \mathbb{N}; 19 < m < 30\}$.

- (a) Determinați mulțimea $A \cap B$.
(b) Comparați suma elementelor mulțimii A cu suma elementelor mulțimii B .

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciții (enunț modificat)

3. Fie punctele S, O, P , coliniare, în această ordine. Se consideră Q și R două puncte situate în același semiplan determinat de dreapta SP . Numerele naturale prime a, b, c verifică relațiile: (a) $a \cdot \widehat{QOR} = b \cdot \widehat{POQ}$, (b) $b \cdot \widehat{ROS} = c \cdot \widehat{QOR}$, (c) $2a + 8b + 12c = 64$.

- (a) Determinați numerele prime a, b, c .
(b) Demonstrați că semidreapta (OR este bisectoarea unghiului \widehat{SOQ} și OR este perpendiculară pe OE , unde semidreapta (OE este bisectoarea unghiului \widehat{POQ}).

Doina Păun

4. Punctele A_1, A_2, \dots, A_8 sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O , astfel încât măsurile arcelor $\widehat{A_1 A_2}, \widehat{A_2 A_3}, \dots, \widehat{A_8 A_1}$ sunt direct proporționale cu $1, 2, \dots, 8$.

- (a) Determinați măsurile arcelor $\widehat{A_1 A_2}, \widehat{A_2 A_3}, \dots, \widehat{A_8 A_1}$.
(b) Demonstrați că punctele A_3 și A_7 sunt diametral opuse.
(c) Dacă punctul M este mijlocul lui $\widehat{A_4 A_5}$ și N este simetricul punctului A_2 față de punctul O , calculați măsura unghiului \widehat{MON} .

Rodica Cocalea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a VII-a

1. Se consideră numerele:

$$A = \sqrt{\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2^2}} + \sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2025^2 \cdot 2026} - \frac{1}{2025 \cdot 2026^2}},$$
$$B = \frac{1}{[\sqrt{1 \cdot 2}] \cdot [\sqrt{3 \cdot 4}]} + \frac{1}{[\sqrt{3 \cdot 4}] \cdot [\sqrt{5 \cdot 6}]} + \dots + \frac{1}{[\sqrt{2023 \cdot 2024}] \cdot [\sqrt{2025 \cdot 2026}]},$$

unde, $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- (a) Arătați că A este număr rațional.
- (b) Calculați partea fracționară a numărului $2025 - A \cdot B$.

Lucica Ghișe

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Demonstrați că dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^*$ au proprietatea că

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 2,$$

atunci cel puțin unul dintre numerele x_1, x_2, \dots, x_n este egal cu 1 sau -1.

Romeo Ilie

3. Fie $ABCD$ un romb și O punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Consideră punctele $E \in (CD)$ și $M \in (AE)$, astfel încât $DM \perp AE$. Fie F simetricul punctului A față de M și P mijlocul segmentului FC .

- (a) Arătați că $OM \perp PD$.
- (b) Dacă $(AF$ este bisectoarea unghiului \widehat{OAD} , demonstrați că $PO = PD$.

Gazeta Matematică

4. $ABCD$ este un paralelogram cu $\widehat{BAD} = 30^\circ$ și $\widehat{ABD} = 105^\circ$. Fie un punct E pe latura AD , astfel încât $AE = BE$. Perpendiculara din D pe BC intersectează dreapta EB în F .

- (a) Demonstrați că $BDCF$ este trapez isoscel.
- (b) Arătați că raportul dintre aria paralelogramului $ABCD$ și aria trapezului $BDCF$ este egal cu $\frac{AB}{AD}$.

Dorina Rapcea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x^2(y+z) = y^2(x+z) = 2024$ şi $x \neq y$. Calculaţi $z^2(x+y)$.

Gazeta Matematică

2. Determinaţi numerele reale nenule a, b, c ştiind că

$$a + \frac{1}{bc} = 2b, \quad b + \frac{1}{ac} = 2c \text{ şi } c + \frac{1}{ab} = 2a.$$

Romeo Ilie

3. O furnică se deplasează pe suprafaţa laterală a unui con de la punctul A la punctul B , unde AB este un diametru al bazei conului, parcurgând drumul cel mai scurt. Determinaţi lungimea drumului parcurs de furnică, ştiind că generatoarea conului are o lungime de 50 cm, iar prin desfăşurarea suprafeţei laterale a conului se obţine un sector circular care are măsura unghiului la centru egală cu 120° .

Ioana Maşca

4. Considerăm piramida triunghiulară $VABC$ având $VA \perp VB$, $VB \perp VC$ şi $VC \perp VA$. Fie $VD \perp BC$, cu $D \in BC$ şi $VH \perp AD$, cu $H \in AD$. Demonstraţi că:

- (a) $(VAD) \perp (ABC)$.
(b) H este ortocentrul triunghiului ABC .
(c) $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{VAB}^2 + \mathcal{A}_{VBC}^2 + \mathcal{A}_{VCA}^2$.

Marinela Canu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.