

10

Olimpiada Națională de Matematică  
Etapă locală, 8 februarie 2025

Clasa a X-a

AG  
2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

<p>a) Din <math>a_i \in (0; 1)</math> sau <math>a_i \in (1, +\infty)</math>, <math>(\forall) i \in \overline{1, 2025}</math> avem</p> $\begin{cases} \log_{a_1} a_2 > 0 \\ \log_{a_2} a_3 > 0 \\ \dots \\ \log_{a_{2025}} a_1 > 0 \end{cases}$	<p>1p</p>
<p>Folosind inegalitatea mediilor <math>m_a \geq m_g</math> :</p> $\frac{\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{2025}} a_1}{2025} \geq \sqrt[2025]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_{2025}} a_1} =$ $\sqrt[2025]{\frac{\lg a_2}{\lg a_1} \cdot \frac{\lg a_3}{\lg a_2} \cdot \dots \cdot \frac{\lg a_{2025}}{\lg a_{2024}} \cdot \frac{\lg a_1}{\lg a_{2025}}} = 1.$ <p>Așadar, <math>\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_{2025}} a_1 \geq 2025</math>.</p>	<p>3p</p>
<p>b) Cum <math>(\forall) i \in \overline{1, 2025}</math> avem <math>\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0</math> (<math>R_1</math>) <math>\Rightarrow x_i^2 \geq x_i - \frac{1}{4}</math> (<math>R_2</math>), dar</p> <p><math>x_i \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)</math>, <math>\forall i \in \overline{1, 2025}</math>. <b>Observație:</b> <math>x_i - \frac{1}{4} \in \left(0; \frac{3}{4}\right)</math>, deci subunitar.</p> <p>Din (<math>R_2</math>)</p> $\begin{cases} \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) \geq \log_{x_1} x_2^2 = 2 \log_{x_1} x_2 \\ \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) \geq \log_{x_2} x_3^2 = 2 \log_{x_2} x_3 \\ \dots \\ \log_{x_{2025}} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right) \geq \log_{x_{2025}} x_1^2 = 2 \log_{x_{2025}} x_1 \quad (+) \end{cases}$	<p>1p</p>
<p>re (conform punctului a)) <math>\Rightarrow \min E(x_1, x_2, \dots, x_{2025}) = 4050</math>, egalitatea fiind realizată când avem egalități în (<math>R_1</math>), adică <math>x_1 = x_2 = \dots = x_{2025} = \frac{1}{2}</math>.</p>	<p>2p</p>

### Subiectul II – soluție orientativă

Condiții de existență  $x \in (0, +\infty)$

1p

Logaritmăm ecuația dată în baza 2 și obținem :

$$\log_2 \left( \frac{x}{98} \right) \cdot \log_2 x + \log_2 7 \cdot \log_2 14 = \log_2 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x (\log_2 x - \log_2 98) + \log_2 7 \left( \log_2 2 + \log_2 7 \right) = 0 \quad (R_1)$$

Notăm  $\log_2 x = t$  și  $(R_1)$  devine

$$t^2 - t \cdot \underbrace{\log_2 (7^2 \cdot 2)}_{1+2\log_2 7} + \log_2 7 + \log_2^2 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - (1 + 2\log_2 7)t + \log_2 7 + \log_2^2 7 = 0 \quad (R_2)$$

3p

Discriminantul ecuației  $(R_2)$  este:

$$\Delta = (1 + 2\log_2 7)^2 - 4(\log_2 7 + \log_2^2 7) = 1 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 + 2\log_2 7 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

1p

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{not} \\ t_1 = \log_2 x = \log_2 7 \Rightarrow x = 7 \in \text{cond.} \\ \text{not} \\ t_2 = \log_2 x = \frac{2(1 + \log_2 7)}{2} = \log_2 (2 \cdot 7) = \log_2 14 \Rightarrow x = 14 \in \text{cond.} \end{cases}$$

2p

### Subiectul III – soluție orientativă

a) Evident  $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1)$  este soluție.

1p

Pentru  $x \in [1; +\infty)$ , folosind formula  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ , ecuația poate fi scrisă sub forma

$$3^{\lg[x]} + 4^{\lg[x]} + 5^{\lg[x]} = 6^{\lg[x]}, \text{ de unde obținem în mod unic } \lg[x] = 3 \quad (R_1), \text{ de unde}$$

$$\text{folosind egalitatea tripletelor de cuburi } 3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3.$$

$$\text{Din } (R_1) \lg[x] = 3 \Rightarrow x \in [10^3, 10^3 + 1) \Rightarrow x \in [1000; 1001) \text{ este soluție.}$$

2p

$$***(\text{Variantă alternativă funcția } f(x) = \left(\frac{3}{6}\right)^{\lg[x]} + \left(\frac{4}{6}\right)^{\lg[x]} + \left(\frac{5}{6}\right)^{\lg[x]} \text{ stict}$$

descrescătoare)

Soluție finală  $x \in [0; 1) \cup [1000; 1001)$ .

1p

b) )  $\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 = \frac{\lg 3}{\lg 2} + \frac{\lg 4}{\lg 3} + \frac{\lg 5}{\lg 4} + \frac{\lg 6}{\lg 5} \geq$

$\stackrel{ma \geq mg}{\geq} 4 \sqrt[4]{\frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 5}} = 4 \sqrt[4]{\frac{\lg 6}{\lg 2}}$

1p

Deci este suficient să arătăm că  $4 \sqrt[4]{\frac{\lg 6}{\lg 2}} > 5 \Leftrightarrow 4 \sqrt[4]{\log_2 (2 \cdot 3)} > 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \sqrt[4]{\log_2 3 + 1} > 5 \stackrel{|^4}{\Rightarrow} 256(\log_2 3 + 1) > 625 \text{ (R}_2\text{)}$

Cum  $\log_2 3 > \frac{3}{2}$  (evident pentru că  $2 \log_2 3 > \log_2 2^3 \Leftrightarrow \log_2 9 > \log_2 8$ ) și

folosind asta în (R<sub>2</sub>) avem:

$256 \log_2 3 + 256 > 256 \cdot \frac{3}{2} + 256 = 128 \cdot 3 + 256 = 384 + 256 = 640 > 625$  și

inegalitatea este demonstrată.

**Subiectul IV – soluție orientativă**

Observăm că (R<sub>1</sub>)  $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon \\ \frac{y}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = -\varepsilon^2 \\ \frac{z}{2} = 1 \end{cases}$  sunt rădăcinile de ordinul al 3-lea

1p

ale lui -1, adică rădăcinile ecuației  $x^3 + 1 = 0$ .

Din (R<sub>1</sub>) avem  $\begin{cases} x = 2\varepsilon \\ y = -2\varepsilon^2 \\ z = 2 \end{cases}$

Relația din enunț devine  $2^p \varepsilon^p + (-2)^p \varepsilon^{2p} = 2^p$ ;  $2^p \Leftrightarrow \varepsilon^p + (-1)^p \varepsilon^{2p} = 1 \text{ (R}_3\text{)}$

Cum relația trebuie demonstrată pentru orice număr prim  $p > 3 \Rightarrow p$  poate avea formele  $6n-1$  sau  $6n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , iar  $\varepsilon^6 = 1$ .

2p

Cazul I.  $p = 6n-1$ , relația (R<sub>3</sub>) devine:  $\varepsilon^{6n-1} + (-1)^{6n-1} \varepsilon^{12n-2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\varepsilon^6)^n \cdot \frac{1}{\varepsilon} - (\varepsilon^6)^{2n} \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon - 1 = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \text{ (A)}$

2p

Cazul al II-lea.  $p = 6n+1$ , relația (R<sub>3</sub>) devine:  $\varepsilon^{6n+1} + (-1)^{6n+1} \varepsilon^{12n+2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\varepsilon^6)^n \cdot \varepsilon - (\varepsilon^6)^{2n} \varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon - \varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \text{ (A)}$

Astfel, demonstrația problemei este încheiată.

2p

**Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător**

Varianta 2