

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
01.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL 1

a) Determinați mulțimea $A = \left\{ \frac{11x+12}{3x+2} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{Z} \right\}$.

b) Rezolvați în $\mathbf{Z}$ ecuația $\sqrt{\frac{11x+12}{3x+2}} = x - 2$.

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- a) $\left| \begin{array}{l} \frac{11x+12}{3x+2} \in \mathbf{N} \Rightarrow (3x+2)/(11x+12) \in \mathbf{N} \\ \text{dar } (3x+2)/(3x+2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (3x+2)/(33x+36) \\ (3x+2)/(33x+22) \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1\text{p}$
- Deci $(3x+2)/14 \Rightarrow (3x+2) \in \{-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14\} \Rightarrow \dots\dots\dots 1\text{p}$
- $\Rightarrow 3x \in \{-16, -9, -4, -3, -1, 0, 5, 12\} \Rightarrow x \in \{-3, -1, 0, 4\} \dots\dots\dots 1\text{p}$
- $\text{dar } x \in \mathbf{Z}$
- Dar $\frac{11x+12}{3x+2} \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \{-3, 0, 4\} \Rightarrow A = \{3, 6, 4\} \dots\dots\dots 1\text{p}$
-
- b) $\left| \begin{array}{l} \text{Cum } x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sqrt{\frac{11x+12}{3x+2}} \in \mathbf{N} \Rightarrow \frac{11x+12}{3x+2} \in \mathbf{N} \\ \text{Conform subpunctului a) } \frac{11x+12}{3x+2} \in \{3, 6, 4\} \text{ și } \sqrt{\frac{11x+12}{3x+2}} \in \mathbf{N} \Rightarrow \frac{11x+12}{3x+2} = 4 \\ \text{Finalizare } x = 4 \end{array} \right. \dots\dots\dots 1\text{p}$
- $\dots\dots\dots 1\text{p}$
- $\dots\dots\dots 1\text{p}$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
01.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL 2

Se consideră numerele $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{167}{168}$ și $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{168}{169}$.

- a. Arătați că $\sqrt{xy}$ este număr rațional.
- b. Demonstrați că $x < y$.
- c. Arătați că $x < \frac{1}{13}$.

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

a)	$xy = \frac{1}{169}$	 1p
	$\sqrt{xy} = \frac{1}{13} \in \mathbb{Q}$	 1p
b)	Demonstrarea inegalității $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$	 1p
	Inegalitatea se aplică pentru $n=1, 3, 5, \dots, 167$	 1p
	Inegalitățile obținute se înmulțesc, rezultă $x < y$	 1p
c)	$x = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} < \sqrt{x \cdot y}$	 1p
	Dar $\sqrt{x \cdot y} = \frac{1}{13}$, deci $x < \frac{1}{13}$	 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
01.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL 3

Fie paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 4\text{cm}$, $AB \perp BD$ și $\sphericalangle BAD = 2\sphericalangle ADB$.
 Punctul E este simetricul punctului B față de D , iar $EA \cap BC = \{F\}$.

- a)** Aflați măsurile unghiurilor paralelogramului.
- b)** Calculați perimetrul paralelogramului.
- c)** Determinați lungimile segmentelor CE și CF .

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- | | | |
|-----------|--|-----------------|
| a) | În $\triangle ABD$, $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ | 1p |
| | Finalizare $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) = 120^\circ$ | 1p |
| b) | În $\triangle ABD$, $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle ADB) = 30^\circ \Rightarrow AD = 8\text{cm}$ | 1p |
| | Finalizare: $P_{ABCD} = 24\text{ cm}$ | 1p |
| c) | $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow CD \perp BE$ | |
| | În $\triangle BCE$, $[CD]$ mediană și înălțime $\Rightarrow CE = BC = 8\text{cm}$ | 1p |
| | În $\triangle BEF$, $DA \parallel BF$, D mijlocul lui $BD \Rightarrow DA$ linie mijlocie $\Rightarrow FB = 16\text{ cm}$ | 1p |
| | Finalizare $CF = CB + BF = 24\text{ cm}$ | 1p |

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
01.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL 4

În dreptunghiul ABCD punctul O este intersecția diagonalelor și P simetricul lui A față de BD

- a. Demonstrați că patrulaterul BCPD este trapez isoscel.
- b. Dacă punctul Q este simetricul lui C față de BD, arătați că punctele P, O și Q sunt coliniare.

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

- a) BD mediatoarea segmentului $[AP] \Rightarrow [AD] \equiv [DP]$
- Dar $[AD] \equiv [BC] \Rightarrow [BC] \equiv [DP]$ 1p
- $AP \cap DB = \{E\}$ și $CF \perp DB, F \in DB. \triangle DEP \equiv \triangle BFC$ 1p
- $\Rightarrow [PE] \equiv [FC]$
- $PE \parallel CF$, deci $PEFC$ – dreptunghi $\Rightarrow PC \parallel DB$ 1p
- Finalizare 1p
- b) $[DP] \equiv [QB]$ 1p
- $\widehat{PDB} \equiv \widehat{DBC} \equiv \widehat{QBD} \Rightarrow DP \parallel QB$ 1p
- $\Rightarrow DPBQ$ paralelogram $\Rightarrow P, O, Q$ coliniare 1p