# Elemente de analiză matematică

***Operații cu șiruri***

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri convergente. Atunci:

♦ $(a_n + b_n)_n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

♦ Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $(\alpha \cdot a_n)_n$ e convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

♦ $(a_n b_n)_n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

♦ Dacă $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ e convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

***Suma șirurilor care au limită***

Proprietatea cunoscută: *Suma a două șiruri convergente este un șir convergent și limita sumei este egală cu suma limitelor* se extinde, în cazul în care unul cel puțin din cele două șiruri are limita infinită, în felul următor:

I) Dacă $a_n \geqslant \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$.

II) Dacă $a_n \leqslant \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

Dacă $(a_n)$ este convergent sau dacă $a_n \to +\infty$, atunci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_n \geqslant \alpha$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. De asemenea, dacă $(a_n)$ este convergent, sau dacă $a_n \to -\infty$, există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_n \leqslant \alpha$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Din cele două proprietăți de mai sus rezultă următoarele patru propoziții:

*1)* Dacă $a_n \to +\infty$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$.

*2)* Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to +\infty$, atunci $a_n + b_n \to +\infty$.

*3)* Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

*4)* Dacă $a_n \to -\infty$ și $b_n \to -\infty$, atunci $a_n + b_n \to -\infty$.

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că *limita sumei este egală cu suma limitelor*, convenim ca:

$\infty + \infty = \infty$

$a + \infty = \infty + a = \infty$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;

$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;

$-\infty + (-\infty) = -\infty$.

Nu se acordă nici un sens scrierii $\infty - \infty$.

Pentru a putea afirma în general că limita produsului a două șiruri este egală cu produsul limitelor, convenim că: $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty(-\infty) = (-\infty)\infty = -\infty$; $(-\infty)(-\infty) = \infty$.

Nu se acordă nici un sens scrierilor $0 \cdot \infty$ sau $0 \cdot (-\infty)$.

Dacă șirurile $(a_n)$ și $(b_n)$ au limită (finită sau infinită) și dacă produsul limitelor are sens, atunci șirul produs $(a_n b_n)$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Cazuri exceptate: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Fiecare din aceste două cazuri va fi denumit mai departe „cazul $0 \cdot \infty$“.

Pentru a putea afirma în general că *limita raportului a două șiruri este egală cu raportul limitelor*, convenim că: $\frac{a}{+\infty} = 0$ și $\frac{a}{-\infty} = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

Nu se acordă nici un sens scrierilor $\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{0}$.

Dacă șirurile $(a_n)$ și $(b_n)$ au limită și dacă raportul limitelor are sens, atunci șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Pentru a putea calcula limite de tip $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, convenim că: $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$, $0^\infty = 0$. Nu se acordă nici un sens scrierilor: $\infty^0$, $1^\infty$, $0^0$.

*Limita unui polinom P(n) având gradul k ⩾ 1*

$$l = \lim_{n\to\infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0) = \begin{cases} \infty, & a_k > 0 \\ -\infty, & a_k < 0 \end{cases}.$$

*Limita unui raport de polinoame*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a^k}{b_l}, & k = l \\ 0, & k < l \\ \infty \cdot \frac{a_k}{b_l}, & k > l \end{cases}.$$

*Limita unui șir al cărui termen general conține puteri*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & -1 < a < 1 \\ \text{nu există}, & a \leqslant -1 \end{cases}.$$

Șirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$ este convergent. Limita sa, notată cu $e$, aparține intervalului $(2, 3)$.

Dacă $(a_n)_n$ este un șir cu $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, atunci $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Dacă $(a_n)_n$ este un șir nenul cu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

***Limite de funcții***

Punctul $a \in \mathbb{R}$ este *punct de acumulare la dreapta* (*la stânga*) pentru $D \subseteq \mathbb{R}$ dacă, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap D \cap (a, +\infty) \neq \varnothing$ (respectiv $V \cap D \cap (-\infty, a) \neq \varnothing$). Un punct de acumulare la stânga și la dreapta pentru D se numește *punct de acumulare (bilateral)*.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, *a* un *punct de acumulare* al lui *D* și $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Funcția f are limita l în punctul a* dacă este îndeplinită una dintre următoarele condiții echivalente:

1) (*Definiția cu vecinătăți*) Pentru orice vecinătate *U* a lui *l*, există o vecinătate *V* a lui *a* astfel încât, oricare ar fi $x \in V \cap D$, $x \neq a$, să avem $f(x) \in U$.

2) (*Definiții cu ε și δ*)

• În cazul $a \in \mathbb{R}$ și $l = \infty$:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists\ \delta > 0, \forall x \in D \setminus \{a\},\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

• În cazul $a = -\infty$ și $l \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in D \setminus \{a\},\ x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

• În cazul $a \in \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, astfel încât $\forall x \in D \setminus \{a\}$ cu $|x - a| < \delta$, rezultă $|f(x) - l| < \varepsilon$.

• În cazul $a = \infty$ și $l = \infty$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, astfel încât $\forall x \in D$, $x > \delta$, rezultă $f(x) > \varepsilon$.

3) (*Definiția cu șiruri*)

$\forall (a_n)_n$, $a_n \in D \setminus \{a\}$, $a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to l$.

Vom scrie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și *a* un punct de acumulare la stânga pentru D.

Spunem că $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ este *limita la stânga a funcției f în punctul a*, dacă pentru orice vecinătate *U* a lui *l*, există o vecinătate *V* a lui *a* astfel încât, oricare ar fi $x < a$ din $V \cap D$ să avem $f(x) \in U$.

Se folosesc următoarele notații: $l_s = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a - 0)$.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și *a* un punct de acumulare la dreapta pentru *D*.

Spunem că $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ este *limita la dreapta a funcției f în punctul a*, dacă pentru orice vecinătate *U* a lui $l_d$, există o vecinătate *V* a lui *a*, astfel încât, oricare ar fi $x > a$ din $V \cap D$, să avem $f(x) \in U$. Se folosesc următoarele notații:

$l_d = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a + 0)$.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ și *a* un punct de acumulare bilateral pentru D. Funcția *f* are limită în *a* dacă și numai dacă *f* are limită la dreapta și la stânga în *a* și aceste limite sunt egale.

***Limitele funcțiilor elementare***

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = c, \forall\, \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$; $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha = f(\alpha)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

• $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$; $\lim\limits_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 1 \\ \infty, & \text{dacă } 0 < a < 1 \end{cases}$.

• $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$; $\lim\limits_{x\to\alpha} \sin x = \sin\alpha$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$; nu există $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$.

• $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, $\lim\limits_{x\to\alpha} \cos x = \cos\alpha$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$; nu există $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$.

• $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} |x| = |\alpha| = f(\alpha)$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = \infty$.

• Funcția putere cu exponent natural: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$;

$\lim\limits_{x\to\alpha} x^n = (\lim\limits_{x\to\alpha} x)^n = \alpha^n = f(\alpha)$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = (\lim\limits_{x\to\infty} x)^n = \infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = (\lim\limits_{x\to-\infty} x)^n = \begin{cases} \infty, & n \text{ par} \\ -\infty, & n \text{ impar} \end{cases}$.

• Funcțiile radical: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, $k$ par;

$\lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{\alpha}$, $\forall\, \alpha \in [0, \infty)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[k]{x} = \infty$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $k$ impar;

$\lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{\alpha}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[k]{x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[k]{x} = -\infty$.

• Funcția logaritmică: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$;

$\lim\limits_{x\to\alpha} \log_a x = \log_a \alpha$, $\forall\, \alpha \in (0, +\infty)$;

dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \log_a x = -\infty$;

dacă $0 < a < 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \log_a x = +\infty$.

• Funcția putere cu exponent real: $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\alpha^a=f(\alpha)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}\infty, & a>0\\ 0, & a<0\end{cases}$; $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\begin{cases}0, & a>0\\ \infty, & a<0\end{cases}$.

• Funcția tangentă: $f:\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\text{tg}x$.

Pentru $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\text{tg}x=\text{tg}\alpha$;

$\lim\limits_{x\nearrow k\pi+\frac{\pi}{2}}\text{tg}\,x=\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow k\pi+\frac{\pi}{2}}\text{tg}x=-\infty$; nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\text{tg}\,x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{tg}\,x$.

• Funcția cotangentă: $f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\text{ctg}\,x$.

$\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\text{ctg}x=\text{ctg}\alpha$; $\lim\limits_{x\nearrow k\pi}\text{ctg}x=-\infty$; $\lim\limits_{x\searrow k\pi}\text{ctg}\,x=+\infty$; nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\text{ctg}x$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{ctg}x$.

• Funcția arcsinus: $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\arcsin x$.

$\lim\limits_{x\to\alpha}\arcsin x=\arcsin\alpha$, $\forall\alpha\in[-1,1]$.

• Funcția arccosinus: $f:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x)=\arccos x$.

$\lim\limits_{x\to\alpha}\arccos x=\arccos\alpha$, $\forall\alpha\in[-1,1]$.

• Funcția arctangentă: $f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\text{arctg}\,x$.

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\text{arctg}\,x=\text{arctg}\,\alpha$; $\lim\limits_{x\to\infty}\text{arctg}\,x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{arctg}\,x=-\frac{\pi}{2}$.

***Operații cu limite de funcții***

Fie $f,g:D\to\mathbb{R}$, $a$ punct de acumulare pentru D. Presupunem că $f$ și $g$ au limite în $a$.

1) Dacă suma limitelor are sens, atunci $f+g$ are limită în $a$ și $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Propoziția se păstrează pentru $p$ termeni, $p\in\mathbb{N}^*$.

2) Dacă produsul limitelor are sens, atunci $fg$ are limită în $a$ și $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Propoziția se păstrează pentru $p$ factori, $p\in\mathbb{N}^*$, prin urmare $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^p=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^p$.

În particular, $\lim\limits_{x\to a}\alpha f(x)=\alpha\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

3) Dacă raportul limitelor nu este un caz de nedeterminare, atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în $a$ și $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$.

4) Dacă $f > 0$ și dacă puterea $\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nu este un caz de nedeterminare, atunci funcția $f^{g}$ are limită în $a$ și $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Fie două funcții $u : A \to B$, $f : B \to \mathbb{R}$. Fie $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare al mulțimii $A$ și $b \in \overline{\mathbb{R}}$ punct de acumulare al mulțimii $B$. Dacă

1) $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ și $\lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell$;  2) $u(x) \neq b$ pentru $x \neq a$,

atunci funcția compusă $f \circ u$ are limită în punctul $a$ și $\lim\limits_{x\to a} f(u(x)) = \lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell$.

*Criteriul majorării.* Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ și $a$ un punct de acumulare pentru mulțimea $D$.

i) Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $\exists l \in \mathbb{R}$, $\exists\, V \in \mathcal{V}(a)$ cu $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ și $\exists\, V \in \mathcal{V}(a)$, cu $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

iii) Dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ și $\exists\, V \in \mathcal{V}(a)$ cu $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in V \cap D \setminus \{a\}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

*Criteriul „cleștelui“.* Fie $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $a$ un punct de acumulare pentru D și V o vecinătate a lui $a$. Dacă $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \forall x \in V \cap D \setminus \{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$, atunci $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

*Limitele funcțiilor polinomiale.*

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,n}$, $a_n \neq 0$ (funcția polinomială).

♦ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n \left( a_n + a_{n-1}\dfrac{1}{x} + \ \ldots \ + a_0 \dfrac{1}{x^n} \right) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_n < 0 \end{cases}$

♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n \text{ par şi } a_n > 0 \text{ sau } n \text{ impar şi } a_n < 0 \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ impar şi } a_n > 0 \text{ sau } n \text{ par şi } a_n < 0 \end{cases}$.

*Limitele funcțiilor raționale*

Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ și $f_2(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$, $b_m \neq 0$. Funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, unde $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) \neq 0\}$ se numește *funcție rațională*.

♦ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\searrow 0} y^{m-n} \dfrac{a_n + a_{n-1}y + \ \dots\ + a_0 y^n}{b_m + b_{m-1}y + \ \dots\ + b_0 y^m} = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n > m \text{ şi } a_n \cdot b_m > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } n > m \text{ şi } a_n \cdot b_m < 0 \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m \end{cases}.$

Asemănător se procedează pentru $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

♦ Fie $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f_1(a) = f_2(a) = 0$. Atunci există $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(a) \neq 0$ și $g_2(a) \neq 0$ și $i, j \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f_1(x) = (x-a)^i g_1(x)$ și $f_2(x) = (x-a)^j g_2(x)$. Astfel $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{g_1(a)}{g_2(a)} \cdot \lim\limits_{x\to a} (x-a)^{i-j}$.

Nedeterminările care apar în studiul limitelor funcțiilor iraționale se înlătură, de regulă, folosind „factorul comun forțat“ sau raționalizarea.

*Limita funcțiilor de forma* $f(x)^{g(x)}$

Fie $f : D \to (0, +\infty)$, $g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$.

Dacă $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) \ln f(x) = b$ și $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall\, x \in V \cap D \setminus \{a\}$, $g(x)\ln f(x) \neq b$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} e^b, & \text{dacă } b \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{dacă } b = \infty \\ 0, & \text{dacă } b = -\infty \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$.

***Funcții continue***

Fie $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție numerică și $a \in D$. Dacă $a$ este punct izolat al domeniului D, funcția se numește continuă în $a$. Dacă $a$ este punct de acumulare al domeniului D, *funcția $f$* se numește *continuă în $a$*, dacă pentru orice șir $(a_n)$ cu termeni din D, convergent la $a$, șirul $(f(a_n))_n$ este convergent la $f(a)$.

Dacă $a$ este punct de acumulare pentru D, continuitatea lui $f$ în $a$ este echivalentă cu oricare dintre următoarele propoziții:

1) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;

2) Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, $|x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$a$ se numește *punct de discontinuitate* dacă $f$ nu e continuă în $a$.

Punctele de discontinuitate ale unei funcții $f$ se împart în două categorii (spețe):

♦ $a$ se numește *punct de discontinuitate de prima speță* al funcției $f$ dacă limitele laterale ale funcției $f$ în punctul $a$ există și sunt ambele finite.

♦ $a$ se numește *punct de discontinuitate de speța a doua* dacă nu este punct de discontinuitate de prima speță.

Spunem că *o funcție f* este *continuă pe o submulțime a domeniului*, dacă este continuă în fiecare punct al acesteia. Mulțimea punctelor din domeniul de definiție pe care o funcție este continuă se numește *domeniul de continuitate al funcției*.

Funcțiile elementare sunt funcții continue pe întreg domeniul lor de definiție.

Dacă funcțiile $f$, $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$) sunt continue în punctul $a \in \mathrm{D}$, atunci funcțiile $af + bg$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$) și $f \cdot g$ sunt continue în $a$. Dacă, în plus, $g(a) \neq 0$, atunci există $V \in \mathscr{V}(a)$ astfel încât $g(x) \neq 0, \forall x \in V \cap \mathrm{D}$ și $\dfrac{f}{g}$ este continuă în $a$.

Fie $f: \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ și $g: \mathrm{E}_2 \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \subset \mathbb{R}$) și $h = g \circ f : \mathrm{E}_1 \to \mathbb{R}$ funcția compusă. Dacă $f$ este continuă în $a \in \mathrm{E}_1$ și $g$ este continuă în $f(a) \in \mathrm{E}_2$, atunci $h$ este continuă în $a$.

*Teorema de mărginire a lui Weierstrass*

Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

**1)** $f$ este mărginită;

**2)** $f$ își atinge marginile, adică $\exists\, \alpha, \beta \in [a, b]$ cu $f(\alpha) = \min\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ și $f(\beta) = \max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$.

Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă și $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare, atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = 0$.

Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval, atunci funcția păstrează același semn pe acel interval.

Fie $f$ o funcție continuă pe intervalul I și $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Funcția $f: \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ este bijectivă dacă și numai dacă $f$ este strict monotonă și, în acest caz, funcția inversă $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ este continuă și strict monotonă.

Dacă $f : [a; b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ și există $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = l \in \mathbb{R}$, atunci funcția $g : [a; b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a; b) \\ l, & x = b \end{cases}$ se numește *prelungirea prin continuitate a lui f* la $[a; b]$.

***Funcții derivabile***

Fie $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$, $f: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ o funcție și $a$ un punct de acumulare din D. Se numește *derivata funcției f în a*, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, în cazul în care această limită există (finită sau infinită). În acest caz, notăm: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Spunem că *funcția f este derivabilă în a* dacă, în plus, $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Considerăm funcția $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care funcția $f$ este derivabilă se numește *domeniul de derivabilitate al funcției*.

Fie $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ o funcție și $a$ un punct de acumulare din $D$; atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

**1)** $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

**2)** $\forall (x_n)_n \subset \mathrm{D} \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a)$.

Fie $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe submulțimea $S$ a lui D. Se numește *derivata funcției* $f$ funcția care asociază $a \in S$ cu $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Derivata unei funcții $f$ pe domeniul de derivabilitate se notează cu $f'$ sau $\dfrac{df}{dx}$ sau cu $Df$.

***Derivate laterale***

Fie $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathrm{D}$.

Spunem că *f are derivată la stânga în a*, dacă $a$ este punct de acumulare al mulțimii $\mathrm{D} \cap (-\infty, a)$ și există $\lim\limits_{x \nearrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_s(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Spunem că *f are derivată la dreapta în a*, dacă $a$ este punct de acumulare al mulțimii $\mathrm{D} \cap (a, \infty)$ și există $\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un interval, o funcție $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathrm{I}$ un punct interior al lui I. Atunci *f are derivată în a* dacă și numai dacă are derivate laterale egale în $a$. În acest caz, $f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a)$.

***Operații cu funcții derivabile***

Fie funcțiile $f$, $g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ derivabile în $a$.

♦ Funcția $f + g$ este derivabilă în $a$ și $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

♦ Funcția $c \cdot f$ este derivabilă în $a$ și $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$.

♦ Funcția $f \cdot g : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $a$ și $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

♦ Dacă $g(a) \neq 0$, funcția $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în $x_0$ și $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$.

♦ Se consideră funcțiile $f : \mathrm{D} \to \mathrm{E}$, $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, $a$ punct de acumulare din D, $y_0 = f(a)$ punct de acumulare din E. Dacă $f$ este derivabilă în $a$ și $g$ este derivabilă în $y_0$, atunci funcția $g \circ f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $a$ și $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

***Derivabilitatea funcției inverse***

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ două intervale și $f : I \to J$ o funcție strict monotonă cu $f(I) = J$. Dacă $f$ este derivabilă în $a \in I$ și $f'(a) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(a)$ și $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Fie $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ o funcție și $a$ un punct de acumulare din D.

*Funcția f* este *derivabilă de două ori* în $a$ dacă:

**1)** $f$ este derivabilă pe o vecinătate $V$ a lui $a$.

**2)** funcția derivată $f'$ este derivabilă în $a$, adică există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ și este finită.

În acest caz, limita se notează cu $f''(a)$ (sau $\frac{d^2 f(a)}{dx^2}$ sau $D^2 f(a)$) și se numește *derivata a doua* (sau *derivata de ordinul* 2) *a funcției f în punctul a*.

*Funcția* $f : D \to \mathbb{R}$ este *de* $(n + 1)$ *ori derivabilă în a*, dacă:

**1)** $f$ este de $n$ ori derivabilă pe o vecinătate a lui $a$;

**2)** funcția derivată $f^{(n)}$ este derivabilă în $a$, adică există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{x - a}$ și este finită.

În acest caz, limita se notează cu $f^{(n+1)}(a)$ (sau $\frac{d^{n+1} f(a)}{dx^{n+1}}$ sau $D^{n+1} f(a)$) și se numește *derivata de ordin* $(n + 1)$ *a funcției f în punctul a*.

Prin convenție, $f^{(0)} = f$.

O *funcție* $f : D \to \mathbb{R}$ este *indefinit derivabilă pe* D dacă, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f$ este derivabilă de $n$ ori în orice punct al lui D.

*Regula lui Leibniz*. Fiind date funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ de $n$ ori derivabile,
$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$.

***Diferențiala***

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $x_0 \in I$.

*Funcția* $f : I \to \mathbb{R}$ este *diferențiabilă în* $x_0$ dacă există $A \in \mathbb{R}$ și $\alpha : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și nulă în $x_0$ (adică $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$) astfel încât:

$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),\ \forall\, x \in I$.

Cu notațiile anterioare, funcția liniară $h \mapsto A \cdot h$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$ se numește *diferențiala funcției f în punctul* $x_0$ și se notează $df(x_0)$.

Dacă $f$ este diferențiabilă în $x_0$, atunci $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h, \forall\, h \in \mathbb{R}$.

O *funcție* $f : I \to \mathbb{R}$ este *diferențiabilă pe* I dacă este diferențiabilă în orice punct din I.

***Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile***

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție; $a \in D$ se numește *punct de minim absolut* (*sau global*) al funcției $f$ dacă: $f(a) \leqslant f(x), \forall\, x \in D$. $a \in D$ se numește *punct de maxim absolut* (sau *global*) al funcției $f$ dacă: $f(x) \leqslant f(a), \forall\, x \in D$.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție și $a \in I$.

*a* se numește *punct de maxim relativ* (sau *local*) al funcției $f$, dacă există o vecinătate V a lui $a$ astfel încât $f(x) \leqslant f(a), \forall\, x \in V \cap I$; $f(a)$ se numește maxim relativ al funcției.

$x_0$ se numește *punct de minim relativ* (sau *local*) al funcției $f$, dacă există V o vecinătate a lui $x_0$ astfel încât $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall x \in V \cap I$; $f(x_0)$ se numește *minim relativ al funcției*.

$x_0 \in I$ este *punct de extrem relativ* (sau *local*) al lui $f$ dacă este punct de minim sau de maxim relativ (sau local).

*Teorema lui Fermat.* Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă într-un punct de extrem local $x_0$ din interiorul intervalului I ($x_0 \in I$ și nu este capăt al intervalului); atunci $f'(x_0) = 0$.

*Teorema lui Rolle.* Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

1) $f$ este continuă pe $[a, b]$.

2) $f$ este derivabilă pe $(a, b)$

3) $f(a) = f(b)$.

Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

*Teorema lui Lagrange.* Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile:

1) $f$ continuă pe $[a, b]$;

2) $f$ derivabilă pe $(a, b)$.

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

*Teorema lui Cauchy.* Dacă funcțiile $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ îndeplinesc condițiile:

1) $f$ și $g$ sunt continue pe intervalul închis $[a, b]$;

2) $f$ și $g$ sunt derivabile pe intervalul deschis $(a, b)$;

3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$;

atunci $g(a) \neq g(b)$ și există $c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

*Teorema l'Hospital.* Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ și $I \subset \mathbb{R}$ un interval cu $(a, b) \subset I \subset [a, b]$. Dacă $x_0 \in [a, b]$ și $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ sunt funcții cu proprietățile:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$);

2) $f$ și $g$ sunt derivabile și $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

3) există $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ finită sau infinită;

atunci există o vecinătate V a lui $x_0$, astfel încât $g(x) \neq 0, \forall x \in I \cap V \setminus \{x_0\})$ și există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Consecință a teoremei lui Lagrange.* Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I.

a) Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci $f$ este strict crescătoare pe I.

b) Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci $f$ este strict descrescătoare pe I.

***Convexitate***

Fie funcția $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, unde $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ este un interval.

*Funcția f* se numește *convexă* pe I, dacă $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ și $\forall\ \lambda \in [0, 1]$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2).$$

*Funcția f* se numește *concavă* pe I dacă, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ și $\forall\ \lambda \in [0, 1]$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda \cdot f(x_2)$$

Fie $x_0$ punct interior intervalului I. Spunem că $x_0$ este *punct de inflexiune* al funcției $f$ dacă $f$ are derivată în $x_0$ (finită sau infinită) și dacă pe o vecinătate a lui $x_0$, funcția își schimbă convexitatea în $x_0$, adică, de o parte a lui $x_0$ funcția este convexă, iar de cealaltă parte a lui $x_0$ funcția este concavă.

***Asimptote***

Fie $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare al lui D; fie $f: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ o funcție.

Dreapta de ecuație $x = x_0$ este *asimptota verticală* la graficul funcției $f$, dacă cel puțin una dintre limitele laterale: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ sau $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ există și este infinită.

Fie o funcție $f: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$. Dacă D este o mulțime nemărginită la dreapta ($\infty$ este punct de acumulare al mulțimii D), atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$ este *asimptotă oblică spre* $+\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$ fixate.

Dacă D este o mulțime nemărginită la stânga ($-\infty$ este punct de acumulare al mulțimii D), atunci dreapta de ecuație $y = m'x + n'$ este *asimptotă oblică spre* $-\infty$ a graficului dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0$, $m', n' \in \mathbb{R}$ fixate.

Dreapta de ecuație $y = a$ este *asimptotă orizontală spre* $\pm\infty$ la graficul funcției $f$ dacă există $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ și este egală cu $a$.